On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{3}{4}x^2-2x+3.$$

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire, que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}\ ;\ 2\right]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}\ ;\ 2\right]$.

3. Démontrer que pour tout x réel, $x \leqslant f(x)$.

Pour cela, on pourra démontrer que pour tout réel x :

$$f(x)-x=\frac{3}{4}(x-2)^2.$$

On considère la suite (u_n) définie par un réel u_0 et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=f\left(u_n\right).$$

On a donc, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n^2-2u_n+3.$$

4. Étude du cas : $\frac{4}{3} \leqslant u_0 \leqslant 2$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2.$$

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. Prouver que la limite de la suite est égale à 2.

5. Étude du cas particulier : $u_0=3$.

On admet que dans ce cas la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Recopier et compléter la fonction « `seuil` » suivante écrite en Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.

```
def seuil() :
  u = 3
  n = 0
  while ...
      u = ...
      n = ...
  return n
```

6. Étude du cas : $u_0 > 2$.

À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que (u_n) n'est pas convergente.